Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen

Aachen, den 12.11.2010

Übungsblatt 4 — Höhere Mathematik I — WS 2010/2011

Teil B

Aufgabe B 16.

Zeigen Sie, dass die Folge

$$a_n := \frac{2n^2+3n-1}{n^2+5n-5} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

den Grenzwert 2 besitzt, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so angeben, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow |a_n - 2| < \varepsilon.$$

Lösung. Folge: $a_n := \dfrac{2n^2+3n-1}{n^2+5n-5}$, $n \in \mathbb{N}$
Zeige: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2, indem ein $N(\varepsilon)$ angegeben wird, mit

$$|a_n - 2| < \varepsilon \text{ für alle } n > N(\varepsilon)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $n > N(\varepsilon) := \underline{\left[\frac{16}{\varepsilon}\right] + 1}$ (erst Rechnung machen, dann $N(\varepsilon)$ eintragen!)

$$\begin{aligned}
|a_n - 2| &= \left|\frac{2n^2+3n-1}{n^2+5n-5} - 2\right| \\
&= \left|\frac{2n^2+3n-1-2n^2-10n+10}{n^2+5n-5}\right| \\
&= \left|\frac{-7n+9}{n^2+5n-5}\right| \\
&= \frac{|-7n+9|}{n^2+5n-5}
\end{aligned}$$

da $n^2+5n-5 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der Dreiecksungleichung gilt $|-7n+9| \le 7n+9$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |a_n - 2| &\le \frac{7n+9}{n^2+\underbrace{5n-5}_{\ge 0}} \\
&\le \frac{7n+9}{n^2} \\
&\le \frac{7n+9n}{n^2} \\
&= \frac{16}{n}
\end{aligned}$$

Wir müssen nun $N(\varepsilon)$ so wählen, dass $\dfrac{16}{n} < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt.

$$\frac{16}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{16}{\varepsilon}$$

Wähle also $N(\varepsilon) = \left[\frac{16}{\varepsilon}\right] + 1$, dann gilt:

$$|a_n - 2| \leq \frac{16}{n} \overset{n>N(\varepsilon)}{<} \frac{16}{\left[\frac{16}{\varepsilon}\right] + 1} < \frac{16}{\frac{16}{\varepsilon}} = \varepsilon, \text{ da } \left[\frac{16}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{16}{\varepsilon}.$$

□

Aufgabe B 17.

Untersuchen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

(a) $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k}$, (b)* $a_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$,

(c) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ (d) $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2n^2+5}$

Hinweis zu (b): $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Lösung. (a)

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \end{aligned}$$

nach der Formel für die geometrische Summe gilt $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$, also

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^k &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1 - \overbrace{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}^{\to 0 \text{ für } n\to\infty, \text{ da } |-\frac{1}{4}|<1}}{\frac{5}{4}} \\ &\to \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{5}$

Alternativ gilt: $a_n = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} = b_n + c_n$. Mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{4}{5}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{5}$.

(b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}_{=1}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\underbrace{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}}_{=1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\frac{b_n}{c_n}
\end{aligned}
$$

Mit $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ und $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$ folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{2}.$$

(c) Es gilt

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n} - \sqrt{n-1}\\
&= \frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\\
&= \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}+\underbrace{\sqrt{n-1}}_{\geq 0}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n
\end{aligned}
$$

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
Da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

gilt, ist $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ nach dem Vergleichssatz (Satz 3.3) ebenfalls eine Nullfolge, folglich gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(d)

$$a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2n^2+5} = \begin{cases} \frac{n^2}{2n^2+5} & , n \text{ gerade} \\ -\frac{n^2}{2n^2+5} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} b_n & , n \text{ gerade} \\ c_n & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

wegen

$$b_n = \frac{n^2}{2n^2+5} = \frac{1}{2+\frac{5}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

$$c_n = -\frac{n^2}{2n^2+5} = -\frac{1}{2+\frac{5}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{1}{2}$$

ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbestimmt divergent.

□

Aufgabe B 18.

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente relle Folgen mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Zeigen Sie jeweils durch ein Beispiel, dass die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) konvergent,

(b) divergent und beschränkt,

(c) divergent und unbeschränkt

sein kann.

Lösung. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle konvergente Folgen mit $b_n \neq 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

(a) Setze $a_n := b_n$, dann ist $\frac{a_n}{b_n} \equiv 1 \to 1$
$\Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(b) Setze $a_n := (-1)^n b_n$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = (-1)^n$ beschränkt, aber unbestimmt divergent.

(c) Setze $a_n \equiv 1$, dann ist $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{b_n}$. Da b_n eine Nullfolge ist, ist $\frac{a_n}{b_n}$ unbeschränkt und bestimmt divergent.

(Merke: Aufpassen beim Quotienten von Folgen, hier darf man im Allgemeinen nicht $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ zu $\frac{\lim a_n}{\lim b_n}$ vereinfachen!!)

□

Aufgabe B 19.

Zeigen Sie: Wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, so ist auch die Teilfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := a_{2n}$ konvergent und beide Folgen haben denselben Grenzwert. Gilt auch die Umkehrung?

Lösung. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$, so dass $\forall \; n > N(\varepsilon)$ gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Wenn dies für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt, dann sicher auch für alle geraden n, also $n = 2n > N(\varepsilon)$.
$\Rightarrow \forall \; \varepsilon > 0 \; \exists \; N(\varepsilon)$, so dass $\forall \; 2m > N(\varepsilon)$

$$|a_{2m} - a| < \varepsilon.$$

Wählen wir $m_0 := \left[\frac{N(\varepsilon)}{2}\right] + 1$, so ist dann offenbar auch $\forall \; \varepsilon > 0 \; \exists \; m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall \; m > m_0$

$$|a_{2m} - a| < \varepsilon$$

wahr. Mit $b_m := a_{2m}$ folgt somit die Konvergenz von $(b_m)_m$ gegen a für $m \to \infty$.
Gegenbeispiel für Umkehrung:

$$a_n := (-1)^n, \text{ dann } a_{2m} \equiv 1 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \text{ aber } (a_n)_n \text{ ist nicht konvergent.}$$

$\square$